Wenn A und B beliebige Ereignisse sind und $P(B) > 0$ ist, dann ist die bedingte Wahrscheinlichkeit von A, vorausgesetzt B (auch die Wahrscheinlichkeit von A unter der Bedingung B, notiert als $P(A \mid B)$, definiert durch:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Darin ist $P(A \cap B)$ die Wahrscheinlichkeit, dass A und B gemeinsam auftreten. $P(A \cap B)$ wird gemeinsame Wahrscheinlichkeit, Verbundwahrscheinlichkeit oder Schnittwahrscheinlichkeit genannt.

Theorem 1. ***Multiplikationssatz für zwei Ereignisse:***

$$P(A \cap B) = P(A \mid B) \cdot P(B) \tag{1}$$

Verallgemeinert man den obigen Ausdruck des Multiplikationssatzes, der für zwei Ereignisse gilt, erhält man den allgemeinen Multiplikationssatz. Man betrachte dazu den Fall mit n Zufallsereignissen $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

$$\begin{aligned} P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) &= P(A_1) \cdot \tfrac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1)} \cdot \tfrac{P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}{P(A_1 \cap A_2)} \cdots \tfrac{P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n)}{P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1})} \\ &= P(A_1) \cdot P(A_2 \mid A_1) \cdot P(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \cdots P\left(A_n \mid \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right) \end{aligned}$$

Sind nur bedingte Wahrscheinlichkeiten und die Wahrscheinlichkeiten des bedingenden Ereignisses bekannt, ergibt sich die totale Wahrscheinlichkeit von A aus

Theorem 2. ***Gesetz der totalen Wahrscheinlichkeit:***

$$P(A) = P(A \mid B) \cdot P(B) + P(A \mid B^c) \cdot P(B^c), \tag{2}$$

wobei B^c das Gegenereignis zu B bezeichnet.

Wenn A und B stochastisch unabhängig sind, gilt:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B),$$

was dann zu Folgendem führt:

Theorem 3. ***Stochastische Unabhängigkeit:***
Egal, ob das Ereignis B stattgefunden oder nicht stattgefunden hat, ist die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A stets dieselbe.

$$\begin{aligned} P(A \mid B) &= \tfrac{P(A) \cdot P(B)}{P(B)} = P(A) \quad \textit{bzw.} \\ &= P(A \mid B^c) \end{aligned} \tag{3}$$

FÃ$\frac{1}{4}$r den Zusammenhang zwischen $P(A \mid B)$ und $P(B \mid A)$ ergibt sich direkt aus der Definition und dem Multiplikationssatz:

Korollar 4. ***Satz von Bayes:***

$$P(A \mid B) = \frac{P(B \mid A) \cdot P(A)}{P(B)}. \tag{4}$$

Dabei kann $P(B)$ im Nenner mit Hilfe des Gesetzes der totalen Wahrscheinlichkeit berechnet werden.