Aufgabe 1 (5 Punkte): Andi und Bernd werfen Murmeln. Wer in einem Wurf näher an ein markiertes Ziel kommt, gewinnt die Murmel des Anderen. Andi ist der bessere Werfer und gewinnt jede Runde mit 70 % Wahrscheinlichkeit. Er hat zu Beginn nur zwei Murmeln, Bernd fünf Murmeln. Modellieren Sie das Spiel als zeithomogene Markovkette, mit der man die Wahrscheinlichkeiten für die Murmelverteilung nach n Runden berechnen kann.

Lösung: Sei die Zustandsmenge $M = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, wobei der Zustandsname angibt, wie viele Murmeln Andi zu einem Zeitpunkt hat. Insgesamt sind sieben Murmeln im Spiel. Im Zustand 0 hat Andi verloren, im Zustand 7 gewonnen. Zu jedem Zeitpunkt kann der Zustand nur in seinen „Nachbarzustand" wechseln, die Zustände 0 und 7 werden allerdings nie verlassen. Somit ergibt sich folgende Übergangsmatrix:

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}3 & 0 & 0{,}7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}3 & 0 & 0{,}7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}3 & 0 & 0{,}7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}3 & 0 & 0{,}7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}3 & 0 & 0{,}7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}3 & 0 & 0{,}7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Da Andi zu Beginn zwei Murmeln hat, ist die Anfangsverteilung $\pi^{(0)} = (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0)$.

Aufgabe 2 (5 Punkte): Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Andi in dem Spiel in Aufgabe 1 alle Murmeln gewinnt?

Aufgabe 2 (5 Punkte): Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Andi in dem Spiel in Aufgabe 1 alle Murmeln gewinnt?

Lösung: Mit einem Rechner kann man die Wahrscheinlichkeit herausbekommen, indem man eine stationäre Verteilung annähert, indem man $\pi^{(n)}$ für großes n berechnet, z.B.

$$\pi^{(100)} = \pi^{(0)} \cdot \mathbb{P}^{100} \approx (0{,}1815,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0{,}8185)$$

Andi gewinnt also mit 81,85% Wahrscheinlichkeit das Spiel.

In [22]:
```
import numpy as np
```

In [23]:
```
P = np.array([[  1,   0,   0,   0,   0,   0,   0],
              [0.3,   0,0.7,   0,   0,   0,   0],
              [  0,0.3,   0,0.7,   0,   0,   0],
              [  0,   0,0.3,   0,0.7,   0,   0],
              [  0,   0,   0,0.3,   0,0.7,   0],
              [  0,   0,   0,   0,0.3,   0,0.7],
              [  0,   0,   0,   0,   0,   0,   1]], dtype=np.longdouble)
```

In [24]:
```
pi_0 = np.array([0,0,1,0,0,0,0], dtype=np.longdouble)
```

In [25]:
```
pi_n = pi_0.copy()
for i in range(1000):
    pi_n = pi_n.dot(P)

print(pi_n)
```

```
[1.78583647e-001 0.00000000e+000 2.34015558e-101 0.00000000e+000
 5.46036302e-101 0.00000000e+000 8.21416353e-001]
```

In [26]:
```
pi_0 = np.array([0,0,0,0,0,1,0], dtype=np.longdouble)
```

In [27]:
```
pi_n = pi_0.copy()
for i in range(1000):
    pi_n = pi_n.dot(P)

print(pi_n)
```

```
[8.31337667e-003 1.43274831e-102 0.00000000e+000 6.68615879e-102
 0.00000000e+000 7.80051859e-102 9.91686623e-001]
```

analytisch schwierig, da stationäre Verteilung von Anfangsverteilung abhängt.

$(P\text{-}Id)^T \cdot \pi^T = 0$ mit Nebenbedingung, dass Summe 1 ist, ergibt die Gleichung:
$\pi_1 + \pi_7 = 1$

Btw.: wem die Gleichungsform oben kompliziert aussieht, kann auch einfach lineare Gleichungssytem $\pi = \pi P$ (Gauß-Verfahren)

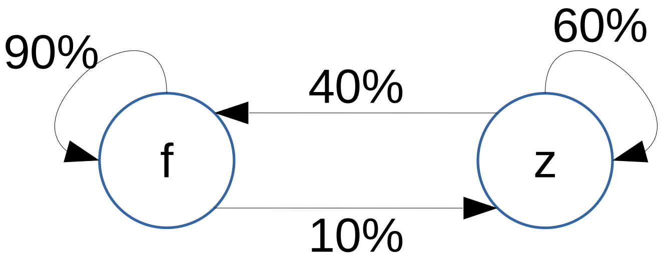
Aufgabe 3 (5 Punkte): Wann und warum setzt man bei einer Markov-Kette Pseudo-Counts ein?

Aufgabe 4 (5 Punkte): Ein Kasino, in dem ein Würfelspiel mit einem Würfel stattfindet, benutzt fünf Würfel. Vier davon sind fair, einer würfelt mit 40 % Wahrscheinlichkeit eine Sechs, mit 20 % Wahrscheinlichkeit eine Fünf und mit jeweils 10 % Wahrscheinlichkeit eine Eins, Zwei, Drei oder Vier. Vor dem Würfelspiel wird zufällig einer dieser Würfel gezogen, und nach jedem Wurf wird mit 40 % Wahrscheinlichkeit der Würfel gewechselt, d. h. zufällig einer der anderen vier Würfel gezogen.

Modellieren Sie diese Situation als HMM mit zwei Zuständen, das die Sequenz der gewürfelten Ziffern emittiert.

Lösung:

- Alphabet: $\Sigma = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- Zustände: $\{f, z\}$ #fair und gezinkt
- Emmisionswahrscheinlichkeiten: $\begin{array}{c} f \\ z \end{array} \begin{pmatrix} 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 1/10 & 1/10 & 1/10 & 1/10 & 1/5 & 2/5 \end{pmatrix}$
- Übergangsmatrix: $\mathcal{P} = \begin{array}{c} \\ f \\ z \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} f & z \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix} \end{array}$
- Anfangsverteilung: $\pi^{(0)} = (0.8, 0.2)$ # f, z



Bonusaufgabe (10 Punkte): Benutzen Sie den Viterbi-Algorithmus, um die wahrscheinlichste Zustandssequenz auszurechnen, bei der das HMM aus Aufgabe 4 die Sequenz 51466. ausgibt.

Sequenz: 51466

$$P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} f & z \end{array} \\ \begin{array}{c} f \\ z \end{array} & \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$E = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{array}{c} f \\ z \end{array} & \begin{pmatrix} 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 1/10 & 1/10 & 1/10 & 1/10 & 1/5 & 2/5 \end{pmatrix} \end{array}$$

Sequenz: 51466

$$P = \begin{array}{c|cc} & f & z \\ \hline f & 0.9 & 0.1 \\ z & 0.4 & 0.6 \end{array} \quad \text{i.e.} \quad P = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{array}{c|cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline f & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ z & 1/10 & 1/10 & 1/10 & 1/10 & 1/5 & 2/5 \end{array}$$

4 von 5 Würfeln fair
4/5 · 1/6 = 2/15

$$V = \begin{array}{c|ccccc} & 5 & 1 & 4 & 6 & 6 \\ \hline f & 2/15 & & & & \\ z & 1/25 & & & & \end{array}$$

1 von 5 Würfeln gezinkt
1/5 · 1/5 = 1/25

Sequenz: 51466

$$P = \begin{array}{c} \\ f \\ z \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} f & z \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$E = \begin{array}{c} \\ f \\ z \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 1/10 & 1/10 & 1/10 & 1/10 & 1/5 & 2/5 \end{pmatrix} \end{array}$$

Wahrscheinlichkeit bis Schritt davor

Übergangswahrscheinlichkeit

$$1/6 \cdot \max\{ 2/15 \cdot 0.9, 1/25 \cdot 0.4\}$$
$$= 1/6 \cdot 0.12$$

$$V = \begin{array}{c} \\ f \\ z \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 5 & 1 & 4 & 6 & 6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2/15 & 0.02 & & & \\ 1/25 & 0.0024 & & & \end{pmatrix} \end{array}$$

$$1/10 \cdot \max\{ 2/15 \cdot 0.1, 1/25 \cdot 0.6\}$$

Sequenz: 51466

$$P = \begin{array}{c} \\ f \\ z \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} f & z \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$E = \begin{array}{c} \\ f \\ z \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 1/10 & 1/10 & 1/10 & 1/10 & 1/5 & 2/5 \end{pmatrix} \end{array}$$

$1/6 \cdot \max\{ 0.02 \cdot 0.9, 0.0024 \cdot 0.4\}$

$$V = \begin{array}{c} \\ f \\ z \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} 5 & & 1 & & 4 & & 6 & & 6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2/15 & \leftarrow & 0.02 & \leftarrow & 0.003 & & & & \\ 1/25 & \leftarrow & 0.0024 & & 0.0002 & & & & \end{pmatrix} \end{array}$$

$1/10 \cdot \max\{ 0.02 \cdot 0.1, 0.0024 \cdot 0.6\}$

Sequenz: 51466

$$P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} f & z \end{array} \\ \begin{array}{c} f \\ z \end{array} & \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$E = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{array}{c} f \\ z \end{array} & \begin{pmatrix} 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 1/10 & 1/10 & 1/10 & 1/10 & 1/5 & 2/5 \end{pmatrix} \end{array}$$

$1/6 \cdot \max\{ 0.003 \cdot 0.9, 0.0002 \cdot 0.4\}$

$$V = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} 5 & 1 & 4 & 6 & 6 \end{array} \\ \begin{array}{c} f \\ z \end{array} & \begin{pmatrix} 2/15 & 0.02 & 0.003 & 4.5 \cdot 10^{-4} & \\ 1/25 & 0.0024 & 0.0002 & 1.2 \cdot 10^{-4} & \end{pmatrix} \end{array}$$

$2/5 \cdot \max\{ 0.003 \cdot 0.1, 0.0002 \cdot 0.6\}$

Sequenz: 51466

$$P = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} f & z \end{array} \\ \begin{array}{c} f \\ z \end{array} & \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$E = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{array}{c} f \\ z \end{array} & \begin{pmatrix} 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 1/10 & 1/10 & 1/10 & 1/10 & 1/5 & 2/5 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$1/6 \cdot \max\{ 4.5 \cdot 10^{-4} \cdot 0.9,\ 1.2 \cdot 10^{-4} \cdot 0.4\}$$

$$V = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} 5 & 1 & 4 & 6 & 6 \end{array} \\ \begin{array}{c} f \\ z \end{array} & \begin{pmatrix} 2/15 & 0.02 & 0.003 & 4.5 \cdot 10^{-4} & 6.75 \cdot 10^{-5} \\ 1/25 & 0.0024 & 0.0002 & 1.2 \cdot 10^{-4} & 2.88 \cdot 10^{-5} \end{pmatrix} \end{array}$$

$$2/5 \cdot \max\{ 4.5 \cdot 10^{-4} \cdot 0.1,\ 1.2 \cdot 10^{-4} \cdot 0.6\}$$

Sequenz: 51466

$$P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} f & z \end{array} \\ \begin{array}{c} f \\ z \end{array} & \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix} \end{array} \qquad E = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{array}{c} f \\ z \end{array} & \begin{pmatrix} 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 1/10 & 1/10 & 1/10 & 1/10 & 1/5 & 2/5 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$V = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} 5 & 1 & 4 & 6 & 6 \end{array} \\ \begin{array}{c} f \\ z \end{array} & \begin{pmatrix} 2/15 & 0.02 & 0.003 & 4.5 \cdot 10^{-4} & \mathbf{6.75 \cdot 10^{-5}} \\ 1/25 & 0.0024 & 0.0002 & 1.2 \cdot 10^{-4} & 2.88 \cdot 10^{-5} \end{pmatrix} \end{array}$$

Sequenz: 51466

$$
P = \begin{array}{c} \\ f \\ z \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cc} f & z \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix} \end{array}
\qquad
E = \begin{array}{c} \\ f \\ z \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 1/10 & 1/10 & 1/10 & 1/10 & 1/5 & 2/5 \end{pmatrix} \end{array}
$$

$$
V = \begin{array}{c} \\ f \\ \\ z \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} 5 & & 1 & & 4 & & 6 & & 6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{2/15} & \leftarrow & \mathbf{0.02} & \leftarrow & \mathbf{0.003} & \leftarrow & \mathbf{4.5 \cdot 10^{-4}} & \leftarrow & \mathbf{6.75 \cdot 10^{-5}} \\ & & \nwarrow & & \nwarrow & & & & \\ 1/25 & \leftarrow & 0.0024 & & 0.0002 & & 1.2 \cdot 10^{-4} & \leftarrow & 2.88 \cdot 10^{-5} \end{pmatrix} \end{array}
$$

Wahrscheinlichste Sequenz fffff

Fragen zur mündlichen Prüfung?